Liste 7
Applications de la dérivation dans $\mathbb{R}$: théorème de l'ouvert connexe, théorème de l'Hospital, recherche d'extréma de fonctions réelles, ...

Exercice 1. Comparer les fonctions suivantes sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$:

$$f : x \mapsto \ln\left(\mathrm{tg}(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \mathrm{arcch}\left(\frac{1}{\cos(x)}\right).$$

Exercice 2. Comparer les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}_0$:

$$f : x \mapsto \mathrm{arctg}(x) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 3. Montrer que pour tous x, y tels que $0 < y < x < \frac{\pi}{2}$, on a

$$\frac{x-y}{\cos^2(y)} \leq \mathrm{tg}(x) - \mathrm{tg}(y) \leq \frac{x-y}{\cos^2(x)}.$$

Exercice 4. Calculer, si elles ont un sens, les limites suivantes :

$$(a)\ \lim_{x\to 0^+} x^x \qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) \qquad (c)\ \lim_{x\to 2^-} \frac{\ln(x-2)}{|2-x|}$$
$$(d)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{cotg}(\alpha x)}{\mathrm{cotg}(\beta x)} \qquad (e)\ \lim_{n\to+\infty} \mathrm{tg}^n\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{n}\right) \qquad (f)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)\right)^{x^2}$$

avec $\alpha, \beta > 0$ et $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \lim_{y\to x} \frac{\sin(y)}{y}.$$

Déterminer son domaine de définition, continuité et de dérivabilité. Calculer sa dérivée première.

Exercice 6. Posons $f(x) = x^2\sin(x) + 2(x\cos(x) - \sin(x))$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une infinité de maximum et minimum locaux mais aucun global.

Exercice 7. Démontrer que parmis tous les rectangles d'aire $A > 0$, celui qui a un périmètre minimum est le carré. Calculer ce périmètre en fonction de A.

Exercices proposés

Exercice 8. Comparer les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \mathrm{arctg}(x).$$

Exercice 9. Calculer, si elles ont un sens, les limites suivantes :

$$(a)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2x^3} \qquad (b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(x) - \sin(x)}{x^3} \qquad (c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\alpha+\beta x^2}\ln(a+bc^x)$$
$$(d)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (2 - 2\frac{x}{\pi})^{\mathrm{tg}(x)} \qquad (e)\ \lim_{x\to+\infty} (a+bc^x)^{\frac{-c}{x}} \qquad (f)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1+a^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$$

avec $a, b, c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_0$

Exercice 10. Démontrer que parmis tous les rectangles de périmètre $P > 0$, celui qui a une aire maximum est le carré. Calculer cette aire en fonction de P.