Travail dirigé 2 : Novembre 2012
Suites, Séries, Continuité, Dérivabilité, Fonctions élémentaires, Primitives, TVI, Rolle, Hosptial, Extrema ...

Exercice 1 (QCM). Choisir la bonne réponse pour chaque item.

1. Le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\ln|2-x|}$ est l'ensemble
   ☐ $]1,+\infty[$ ☐ $]-\infty,1[$ ☐ $]2,+\infty[$ ☐ $\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ ☐ $\mathbb{R}\setminus\{2\}$
   ♣ **aucune des réponses précédentes n'est correcte**

2. La fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\exp(\text{arccotg}(\ln(x)))$
   ☐ est croissante ♣ **est décroissante** ☐ admet un maximum ☐ admet un minimum
   ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte

3. Que vaut $\arccos(\cos(\frac{4\pi}{3}))$?
   ☐ l'expression n'a pas de sens ☐ $\frac{4\pi}{3}$ ☐ $\frac{\pi}{3}$ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 0
   ♣ **aucune des réponses précédentes n'est correcte**

4. Si $a,b,c>0$, la limite $\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sh}(ax)\text{sh}(bx)}{x\text{sh}(cx)}$ vaut
   ☐ la limite n'a pas de sens ☐ 0 ☐ 1 ☐ $\frac{\pi}{2}$ ☐ abc ♣ $\frac{ab}{c}$ ☐ $\frac{c}{ab}$
   ☐ $\frac{1}{abc}$ ☐ $\frac{a+b}{c}$ ☐ $+\infty$ ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte

5. Soit f une fonction dérivable sur $]-\pi/2,\pi/2[$ telle que $f(0)=1$, $f(1)=0$, $[Df]_0=-\sqrt{2}$ et $[Df]_1=\sqrt{3}$. L'expression $D[f(f(f))]_0$
   ☐ n'est pas définie ☐ vaut 0 ☐ vaut $-\sqrt{6}$ ☐ vaut $\sqrt{6}$
   ♣ **aucune de ces réponses**

6. Une combinaison linéaire quelconque de fonctions continues non-dérivables sur une partie E de $\mathbb{R}$ est une fonction
   ☐ non-dérivable ☐ dérivable ☐ dérivable si E est un ouvert connexe
   ☐ dérivable si E est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ♣ **aucune de ces réponses**

Exercice 2. Soit $a,b\in\mathbb{R}$. Etudier la convergence des suites $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ de terme général égal à

$$\text{(a) } x_j=\frac{a^{\ln(j)}}{j^a} \qquad \text{(b) } x_j=\frac{1+2+\ldots+j}{j+2}-\frac{j}{2} \qquad \text{(c) } x_j=j!\,e^{-j}$$

ainsi que celle des suites $(y_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ et $(z_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ définies par récurrence selon

$$\text{(d) } \begin{cases} y_1\in\mathbb{R} \\ y_{j+1}=ay_j+b \end{cases} \qquad \text{(e) } \begin{cases} z_1\in[0,+\infty[\\ z_{j+1}=\dfrac{6(z_j^2+1)}{z_j^2+11} \end{cases}$$

Suggestions pour la première récurrence (considérer une des deux) :
- Montrer qu'il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que la suite $(z_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ définie par $z_j=y_j-C$ est une suite géométrique.
- Montrer que pour tous $j\in\mathbb{N}_0$, on a $y_{j+1}=a^jy_1+\sum_{k=0}^{j-1}a^kb$.

Solution. (a) $x_j\to 0^+$ (b) $x_j\to -\frac{1}{2}^+$ (c) $x_j\to+\infty$
(d) Si $b=0$ et $x_1=0$ alors $x_j=0\to 0$, sinon
pour $a>1$, on a $x_j\to+\infty$; pour $a<-1$, on a $x_j\to\infty$; pour $a=-1$, la suite ne converge pas ;
Si $a=1$, on a ($x_j\to+\infty$ si $b\neq 0$) et ($x_j\to x_1$ si $b=0$) ;
Si $-1<a<1$, on a ($x_j\to\frac{-b}{a-1}$ si $b\neq 0$ et $x_1\neq 0$)
et ($x_j\to 0^+$ si $b=0$ et $x_1\neq 0$ et $0<a<1$) et ($x_j\to 0$ si $b=0$ et $-1<a\leq 0$) .
(e) Si $a=1$ on a $z_j\to 1$, si $a=2$ on a $z_j\to 2$ et si $a=3$ on a $z_j\to 3$. De plus, si $a\in[0,1[$ on a $z_j\to 1^-$, si $a\in]1,2[$ on a $z_j\to 1^+$, si $a\in]2,3[$ on a $z_j\to 3^-$ et enfin si $a\in]3,+\infty[$ on a $z_j\to 3^+$.

Exercice 3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ une suite de $]0,1]$. démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ définie par

$$x_n = \prod_{j=1}^{n} a_j$$

converge dans $\mathbb{R}$.

Solution. Il suffit de montrer que la suite est minorée et décroissante.

Exercice 4. Etudier la convergence des séries

$$\text{(a)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos^2(\alpha j)}{j^{3/2}} \qquad \text{(b)} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j^\alpha}{b^{j\beta}} \qquad \text{(c)} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^{\ln(j)}}$$

$$\text{(d)} \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j^\alpha\,(\ln(j))^\beta} \qquad \text{(e)} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha+1}{2\alpha+3}\right)^j \frac{1}{\sqrt{1+j^p}}$$

pour toutes les valeurs des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_0$, $p \in \mathbb{Z}$. Suggestion : pour la série (d) utiliser le principe de condensation de Cauchy.

Solution. (a) La série converge absolument pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. (b) La série n'est pas définie pour $b < 0$. Elle converge absolument si ($\beta > 0$ et $b > 1$) ou si ($\beta < 0$ et $b \in]0,1[$). Elle diverge si ($\beta < 0$ et $b > 1$) ou si ($\beta > 0$ et $b \in]0,1[$). Si $\beta = 0$ ou si $b = 1$, alors elle diverge si $\alpha \geq -1$ et elle converge si $\alpha < -1$. (c) La série converge absolument. (d) La série converge absolument si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$. Si $\alpha = 1$, la série converge absolument si $\beta > 1$ et diverge si $\beta \leq 1$. (e) La série n'est pas définie pour $\alpha = \frac{-3}{2}$. Elle converge absolument si ($\alpha \in]-\infty, -2[\cup]\frac{-4}{3}, +\infty[$, $\forall p \in \mathbb{Z}$) ou encore si ($\alpha \in \{-2, \frac{-4}{3}\}$ et pour $p \geq 3$). Elle diverge si ($\alpha \in]-2, \frac{-4}{3}[\setminus \{\frac{-3}{2}\}$, $\forall p \in \mathbb{Z}$) ou encore si ($\alpha \in \{-2, \frac{-4}{3}\}$, $\forall p \leq 2$). Elle est semi-convergente si $\alpha = \frac{-4}{3}$ pour $p = 1$ ou $p = 2$.

Exercice 5. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 5x^2 + 4x|x| \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$$

respectivement. On pose $h = f \circ g$; où la fonction h est-elle définie, dérivable, continûment dérivable ?

Solution. La fonction h est continue, dérivable et continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Là ou elles sont définies, comparer les fonctions

$$x \mapsto \arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad \text{et} \quad x \mapsto \arccos\left(\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right).$$

Solution. On a

$$\arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right) & \text{si} \quad x \in [1, +\infty[\\ -\arccos\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right) & \text{si} \quad x \in [0, 1[\end{cases}.$$

Exercice 7. Est-ce que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Solution. oui car elle est aussi continue sur $\mathbb{R}_0$ ainsi que en 0 par la définition.

Exercice 8. Démontrer qu'il existe un réel x tel que $e^x + x = 2$.

Solution. Utiliser le TVI avec la fonction $f(x) = e^x + x$.

Exercice 9. Déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité ainsi que le calcul de la dérivée première pour les fonctions fonctions suivantes :

$$f(x) = x^x \qquad g(x) = \ln(\ln(x)) \qquad h(x) = \frac{x}{e^x}$$

De plus, pour la dernière, trouver une relation de récurrence entre les dérivées.

Solution. La fonction f est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$ on a $Df(x) = (1 + \ln(x))x^x$. La fonction g est définie, continue et dérivable sur $]1, +\infty[$ et $\forall x \in]1, +\infty[$ on a $Dg(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$. La fonction h est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $Dh(x) = \frac{1-x}{e^x}$. De plus, on a $xD^{n+1}h(x) = (1 - x - n)D^n h(x) - nD^{n-1}h(x)$.

Exercice 10. Calculer, si cela a un sens, $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x\to+\infty} x^p \ln(\ln(x))$

Solution. lorsque $p = 0$ et $p > 0$, la limite vaut $+\infty$ et lorsque $p < 0$ grâce au théorème de l'Hospital la limite vaut 0^+.

Exercice 11. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$ alors montrer que f est constante.

Solution. Effectuer la preuve par l'absurde, ensuite utiliser le TVI et obtenir une contradiction.

Exercice 12. Montrer que

$$\delta : (f, g) \mapsto |f(0) - g(0)| + sup_{x\in[0,1]}|Df(x) - Dg(x)|$$

est une métrique sur $C^1(V)$ où V est un voisinage de $[0, 1]$. De plus, avec cette métrique sur $C^1(V)$, la fonction

$$F : C^1(V) \longrightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f\left(\frac{1}{2}\right)$$

est-elle continue ?

Solution. Premièrement, montrer que l'application a bien un sens. Ensuite démontrer les axiomes de la définition pour une métrique. Faire bien attention à la preuve de $\delta(f, g) = 0 \Rightarrow f = g$ car il faut utiliser le théorème de l'ouvert connexe. Enfin, l'application est continue. Pour le montrer, on peut prendre le critère en $'\epsilon, \eta'$. Attention car là il faut utiliser le TAF avec la fonction $f - g$.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Supposons qu'il existe $k > 0$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \geq k|x - y|$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que si F est un fermé de $\mathbb{R}$ alors $f(F)$ est aussi un fermé.

Solution. Prenons une suite $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $f(F)$ qui converge. Notons y sa limite. Il existe $x_j \in F$ tel que $y_j = f(x_j)$. En utilisant, par exemple le critère de Cauchy, et l'inégalité de l'énoncé, on obtient que la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge. Notons x sa limite. Vu que F est un fermé, $x \in F$. En utilisant la continuité de f, on obtient que $f(x) = y$ et donc $y \in f(F)$, ce qui suffit.

Exercice 14. Soient f et g des fonctions définies sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) \leq g(a)$ et $Df(x) \leq Dg(x)$, pour tout $x \in]a, b[$ alors montrer que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Solution. Posons $h = g - f$. Les hypothèses se réécrivent $h(a) \geq 0$ et $Dh(x) \geq 0$, pour tout $x \in]a; b[$. Cette dernière inégalité montre que h est croissant sur $]a; b[$. En en déduit donc que $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$, ce qui suffit.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}_0$ et notons

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)^x \text{ et } g_n(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^n}\right) - \frac{n}{x^n + 1}.$$

(a) Montrer que $Df_n(x) = f_n(x)g_n(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
(b) Montrer que si n est pair, f_n est défini sur $\mathbb{R}_0$, admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$ mais n'admet pas de prolongement C^1 sur $\mathbb{R}$.
(c) Montrer qu'il existe $x \in]0; 1[$ tel que $g_n(x) = 0$ si $n \geq 2$ et que g_1 ne s'annule en aucun point de $]0; +\infty[$. En déduire que f_1 n'admet pas d'extrémum sur $]0; +\infty[$ mais que f_n en admet au moins un si $n \geq 2$.

Solution.

(a) Penser que $f_n(x) = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\right)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$ et utiliser la dérivation de fonctions composées.

(b) Si n est pair, alors $\left(1+\frac{1}{x^n}\right) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0$ et donc f_n est toujours bien définit sur $\mathbb{R}_0$. De plus, en utilisant, par exemple l'hospital, on obtient que $\lim_{x\to 0} f_n(x) = 1$ et un calcul direct montre $\lim_{x\to 0^+} g_n(x) = +\infty$, ce qui suffit.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a $\lim_{x\to 0^+} g_n(x) = +\infty$ et $g_n(1) = \ln(2) - \frac{n}{2}$. Si $n \geq 2$, on a $g_n(1) < 0$. Par le TVI, il existe $x \in]0;1[$ tel que $g_n(x) = 0$. De plus, $Dg_1(x) = \frac{-1}{x(1+x)^2} < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g_1(x) = 0$. On en conclut que g_1 est strictement positif sur $]0;+\infty[$. On en déduit aisément que f_1 n'admet pas d'extrémum sur $]0;+\infty[$ mais que f_n en admet au moins un si $n \geq 2$.

Exercice 16. Posons $f(x) = x^2\sin(x) + 2(x\cos(x) - \sin(x))$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une infinité de maximum et minimum locaux mais aucun global.

Solution. On a $Df(x) = x^2\cos(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc les zéros de Df appartiennent à l'ensemble $\{0\} \cup \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

ATTENTION : 0 n'est pas un extrémum de f car $Df(x) > 0$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$.

De plus, si k est pair (resp. impair), on a $Df(x) > 0$ (resp. < 0) pour tout $x \in]\frac{\pi}{2}+k\pi-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}+k\pi[$ et $Df(x) < 0$ (resp. > 0) pour tout $x \in]\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi+\frac{\pi}{2}[$; ce qui montre que tous les points de l'ensemble $\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ sont des extréma de f.
Enfin, on a $f\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2(-1)^k - 2(-1)^k$ et si on se restreint aux k pair (resp. impair), cette dernière expression tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $k \to \infty$, ce qui montre qu'il ne peut exister d'extrémum global (sur $\mathbb{R}$).

Exercice 17. Primitiver les fonctions suivantes de manière explicite (en spécifiant sur quels intervalles les fonctions sont considérées) :

$$(a)\int x^2\sqrt{1-x^2}dx \quad (b)\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx \quad (c)\int \frac{1}{\sin(x)-\sin(a)}dx$$
$$(d)\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \quad (e)\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}dx \quad (f)\int x\sqrt{2ax-x^2}dx$$
$$(g)\int \sqrt{\frac{x+a}{x+b}}dx \quad (h)\int \frac{x^2}{x^4-1}dx \quad (i)\int x\cos^2(x)dx$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

Solution.

(a) $\frac{x}{8}(2x^2-1)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8}\arcsin(x)$ sur $]-1;1[$.

(b) $\ln\left(\frac{|x|}{|1+\sqrt{1-x^2}|}\right)$ sur $]-1;1[\setminus\{0\}$.

(c) La fonction est primitivable sur $\{x \in \mathbb{R} : x \neq a + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi - a + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Si $a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, une primitive est $\frac{1}{\cos(a)}\ln\left(\frac{|\sin((x-a)/2)|}{|\cos((x+a)/2)|}\right)$
Si $a = (4k+1)\frac{\pi}{2}$, une primitive est $\frac{2}{\tan(x/2)-1}$.
Si $a = (4k+3)\frac{\pi}{2}$, une primitive est $\frac{2}{\tan(x/2)+1}$.
Si $a = k\pi$, une primitive est $\ln|\tan(x/2)|$.

(d) Si $a \neq 0$ alors la fonction est primitivable sur $\mathbb{R}$; si $a = 0$, la fonction est primitivable sur $\mathbb{R}_0$; une primitive est donnée par $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$.

(e) $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arcsin\left(\frac{x}{|a|}\right)$ sur $\{x \in \mathbb{R} : |x| < |a|\}$.

(f) Si $a = 0$, la fonction n'est pas primitivable sur un ouvert de $\mathbb{R}$; si $a > 0$, elle est primitivable sur $]0;2a[$; si $a < 0$, elle est primitivable sur $]2a;0[$; une primitive est donnée par $-\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{6}(3a^2+ax-2x^2) + \frac{a^3}{2}\arcsin\left(\frac{x-a}{a}\right)$.

(g) $\sqrt{(x+a)(x+b)}sign(x+b) + \frac{a-b}{2}\ln\left(|x+b|\left(\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}+1\right)^2\right)$ sur $\{x \in \mathbb{R} : (x+a)(x+b) > 0\}$.

(h) $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{|1-x|}{|1+x|}\right) + \frac{1}{2}\text{arctg}(x)$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

(i) $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}\cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$.